Matemática reversa

Matemática reversa é um programa em logica matemática que procura determinar quais axiomas são necessários para provar teoremas matemáticos. É um método que pode ser rapidamente descrito como “ir reversamente dos teoremas para os axiomas”, que vai de encontro com a prática da matemática tradicional, derivando um teorema a partir de axiomas. O programa da matemática reversa foi prenunciado pelos resultados na teoria de conjuntos, um exemplo de tais resultados é o clássico teorema “O axiom of choice e Zorn’s lemma são equivalentes à teoria dos conjuntos de ZF (Zermelo-Fraenkel)”. O proposito da matemática reversa, no entanto, é estudar possíveis axiomas dos teoremas matemáticos tradicionais e não os possíveis axiomas da teoria dos conjuntos.

Matemática reversa usualmente é fundamentada usando subsistemas da aritmética de segunda ordem, em que muitas definições e métodos são inspirados em trabalhos anteriores em analise construtiva e teoria da prova. O uso da aritmética de segunda ordem permite que muitas técnicas da teoria da recursão sejam empregadas; muitos resultados em matemática reversa têm resultados correspondentes em análise computável.

O programa foi fundado por Harvey Friedman (1975, 1976). A referencia principal para o assunto é (Simpson, 2009)

Conteúdo

1. Princípios Gerais
   1. Uso da Aritmética de segunda ordem
2. O cinco grandes subsistemas da aritmética de segunda ordem
   1. O sistema base [RCA0](https://en.wikipedia.org/wiki/Reverse_mathematics#The_base_system_RCA0)
   2. Weak König’s lemma [WKL0](https://en.wikipedia.org/wiki/Reverse_mathematics#Weak_K.C3.B6nig.27s_lemma_WKL0)
   3. Compreensão Aritmética [ACA0](https://en.wikipedia.org/wiki/Reverse_mathematics#Arithmetical_comprehension_ACA0)
   4. Recursão Transfinita Aritmética [ATR0](https://en.wikipedia.org/wiki/Reverse_mathematics#Arithmetical_transfinite_recursion_ATR0)
   5. [Π11 compreensão Π11-CA0](https://en.wikipedia.org/wiki/Reverse_mathematics#.CE.A011_comprehension_.CE.A011-CA0)
3. Sistemas Adicionais
4. [ω-modelos e β-mode](https://en.wikipedia.org/wiki/Reverse_mathematics#.CF.89-models_and_.CE.B2-models)los
5. Referencias
6. Links Externos

Princípios Gerais

Na matemática reversa, começa-se com uma linguagem estruturada e a base teórica – O núcleo de um sistema axiomático - o que é fraquíssimo para que possamos provar a maioria dos teoremas que estamos interessados, entretanto, ainda assim, é forte o suficiente para desenvolver definições necessárias para estabelecer esses teoremas. Por exemplo, para estudar o teorema “Toda sequencia limitada de números reais tem um número superior” é necessário usar um sistema base o qual se pode falar de números reais e sequencias de números reais.

Para cada teorema que pode ser colocado no sistema base, mas não pode ser provado no mesmo, é preciso determinar um particular sistema de axiomas ( Mais forte que que o sistema base) que necessariamente prove o teorema. Para mostrar que um sistema S é necessário para provar um teorema T, é preciso duas provas. A primeira prova mostra que: T pode ser provado a partir de S; essa é uma simples prova matemática acompanhada de justificações que o sistema de axiomas S infere no teorema T. A segunda prova, conhecida como prova de volta (ou a inversa), mostra que: O próprio teorema T implica no sistema S; essa prova é sustentada pelo sistema base. A inversa estabelece que nenhum sistema de axioma S’ que estende o sistema base pode ter menos propriedade que o sistema S enquanto tentamos provar T.

Uso da aritmética de segunda ordem

A maioria das pesquisas em matemática reversa são focados em subsistemas da aritmética de segunda ordem. O corpo de pesquisa focado em matemática reversa definiu que fracos subsistemas de aritmética de segunda ordem bastam para formalizar quase todos problemas matemáticos de graduação. Em aritmética de segunda ordem, todos objetos podem ser representados tanto com números naturais ou conjunto de números naturais. Por exemplo, para que possamos provar teoremas sobre números reais, os números reais podem ser representados como sequências de Cauchy de números racionais, cada sequência pode ser representada como um conjunto de números naturais.

Os sistemas axiomáticos mais considerados em matemática reversa são definidos usando esquemas de axiomas chamados esquemas de compreensão. Como um esquema que estabelece que qualquer conjunto de números naturais definidos por uma formula de uma dada complexidade existe. Neste contexto, a complexidade de formulas é medida usando a hierarquia aritmética e hierarquia analítica.

A razão pela qual matemática reversa não é realizada usando a teoria de conjuntos como sistema base é que sua linguagem, falando da teoria de conjuntos, é muito expressiva. Conjunto de números naturais extremamente complexos podem ser definidos por formulas simples na linguagem da teoria dos conjuntos (que quantificam sobre conjuntos arbitrários). No contexto de aritmética de segunda ordem, resultados como o teorema de Post, que estabeleceu um link entre a complexidade de uma formula e a definição de (não)computabilidade de conjuntos.

Um outro efeito do uso de aritmética foi a necessidade de restringir teoremas gerais da matemática a uma forma que pudesse ser expressado como aritmética. Por exemplo, aritmética de segunda ordem pode expressar o princípio “Todo vetor espacial contável tem uma base”, mas a mesma não consegue expressar o princípio “Todo vetor espacial tem uma base”. Em termos práticos, isso significa que teoremas de álgebra e combinatória são restritos a estruturas contáveis, enquanto que teoremas de analises e topologias são restritos a espaços separáveis. Muitos princípios que implicam no “axiom of choice” em suas formas gerais (como “Todo vetor espacial tem uma base”) se tornam prováveis em subsistemas mais fracos de aritmética de segunda ordem quando estes são restringidos. Por exemplo, “todo campo tem um fecho algébrico” não é provável na teoria de conjuntos de ZF, mas a forma restrita “todo campo contável tem um fecho algébrico” é provável em RCA0. O mais fraco sistema tipicamente utilizado em matemática reversa.

O cinco grandes subsistemas da aritmética de segunda ordem

Aritmética de segunda ordem é uma teoria formal de números naturais e de conjunto de números naturais. Muitos objetos matemáticos, como círculos contáveis, objetos algébricos, e também pontos, espaços separáveis, podem ser representados com conjuntos de números naturais, e essa representação pode ser estudada em aritmética de segunda ordem.

Matemática reversa faz uso de inúmeros subsistemas da aritmética de segunda ordem. Um típico teorema da matemática reversa mostra que um particular teorema matemático T é equivalente a um particular subsistema S da aritmética de segunda ordem sob um subsistema mais fraco B. Esse subsistema mais fraco B é conhecido como o sistema base para o resultado; Para que haja sentido nos resultados da matemática reversa, esse sistema B não deve ser capaz de provar o teorema matemático T.

Simpson(2009) descreve cinco subsistemas da aritmética de segunda ordem particulares, os quais ele chama de Os grande cinco, que ocorrem frequentemente em matemática reversa. Em função que aumente o poder, esses sistemas são nomeados pelas iniciais RCA0, WKL0, ACA0, ATR0, e Π11-CA0 .

A tabela abaixo resume “Os cinco” sistemas de Simpson (2009, p. 42)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Subsistema | Significado | Ordinal | Corresponde a | Comentários |
| RCA0 | Compreensão recursiva do axioma | ωω | Matemática construtiva (Bishop) | O sistema basa para a matemática reversa. |
| WKL0 | Weak König's lemma | ωω | Reducionismo finistico (Hilbert) |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |